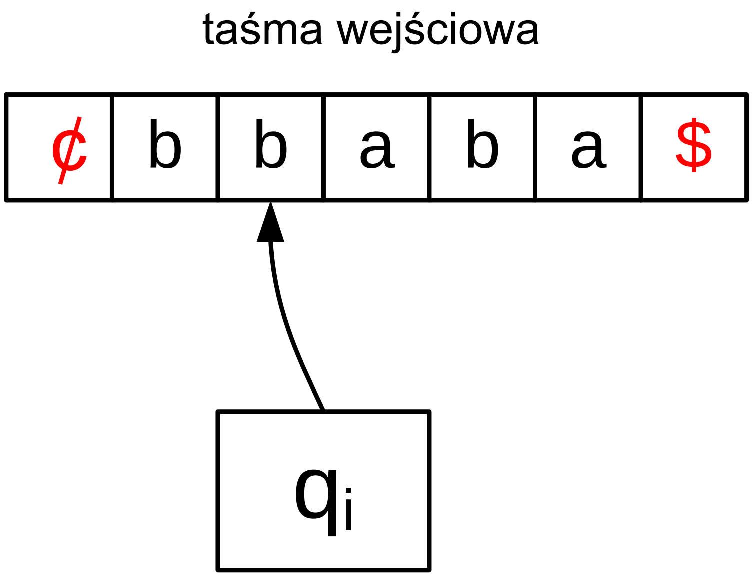
AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA
IM. STANISŁAWA STASZICA W KRAKOWIE

Automat liniowo ograniczony

Teoria automatów i języków formalnych

Dr inż. Janusz Majewski
Katedra Informatyki

Automat liniowo ograniczony (1)

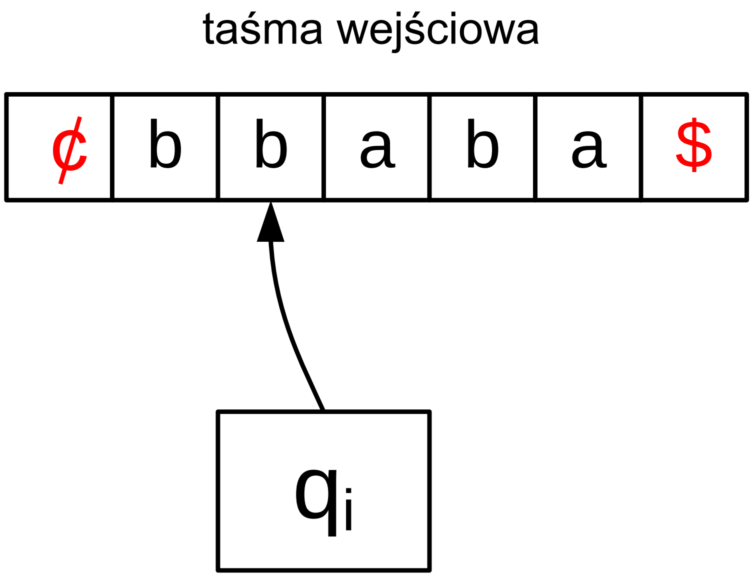


Zależnie od symbolu obserwowanego przez głowicę taśmy oraz stanu sterowania, automat liniowo ograniczony w pojedynczym ruchu:

a) zmienia stan,
b) nadpisuje symbol w obserwowanej komórce taśmy, zastępując nim symbol uprzednio tam wpisany,
c) przesuwa głowicę o jedną komórkę w lewo lub w prawo.

Automat pracuje na SKOŃCZONEJ taśmie i nie może zapisać niczego poza obszarem ograniczonym przez **¢** i **$**. W momencie początkowym pomiędzy ogranicznikami ¢ i $ na taśmie zapisane jest badane słowo. Automat nie może nadpisać symboli ¢ i $ żadnymi innymi symbolami.

Automat liniowo ograniczony (2)



Automat definiujemy jako ósemkę:

$A = \langle Q, \Gamma, q_0, F, \Sigma, ¢, \$, \delta \rangle \in \mathcal{A}_{LO}$

gdzie:

$\mathcal{A}_{LO}$ – klasa automatów liniowo ograniczonych

Q – skończony zbiór stanów

Γ – skończony zbiór symboli taśmy

$q_0 \in Q$ – stan początkowy

$F \subset Q$ – podzbiór stanów końcowych

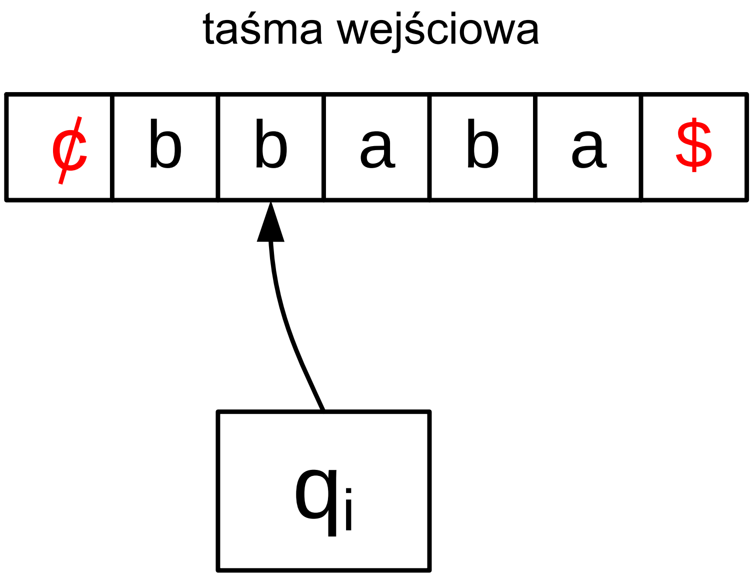
$\Sigma \subset \Gamma$ – alfabet wejściowy

¢ i \$ – lewy i prawy ogranicznik taśmy

$\delta: Q \times \Gamma' \rightarrow 2^{Q \times \Gamma' \times \{L,R\}}$ – funkcja przejścia (*L* – w lewo, *R* – w prawo)

$(\Gamma' = \Gamma \cup \{¢, \$\})$

Automat liniowo ograniczony (3)



Konfiguracja automatu liniowo ograniczonego to: $(q, ¢\alpha\uparrow\beta\$)$ gdzie:

q – stan

$\alpha, \beta \in \Gamma^*$

$\uparrow$ - wskazanie położenia głowicy (głowica obserwuje pierwszy symbol łańcucha β)

Przykład:

Funkcja przejścia:

$\delta(q_i, b) = \{(q_j, a, R)\}$

oznacza ruch:

$(q_i, ¢b\uparrow baba\$) \vdash (q_j, ¢ba\uparrow aba\$)$

Automat liniowo ograniczony (4)

Konfiguracja początkowa:

$(q_0, ¢\uparrow x\$)$ $\qquad x \in \Sigma^*$

Automat liniowo-ograniczony A akceptuje język $L \subset \Sigma^*$ gdy:

$$L(A) = \{x \in \Sigma^* \mid (\exists\, q \in F)\ (\exists\, y \in \Gamma^*)\ ((q_0, ¢\uparrow x\$) \vdash_A^* (q, ¢y\uparrow\$))\}$$

przy czym: $(q, ¢y\uparrow\$)$ – konfiguracja stopująca

$|x| = |y|$

<u>Twierdzenie:</u>

Klasa języków akceptowalnych przez automaty liniowo-ograniczone $\mathcal{L}_{LO}$ jest tożsama z klasą języków kontekstowych $\mathcal{L}_{K}$ (monotonicznych $\mathcal{L}_{M}$) – jest to klasa 1 w hierarchii Chomsky'ego

$\mathcal{L}_{LO} = \mathcal{L}_{K} = \mathcal{L}_{M}$

Przykład: automat akceptujący język $L = \{a^i b^i a^i \mid i = 1,2,...\}$

$A = \langle Q, \Gamma, q_0, F, \Sigma, ¢, \$, \delta \rangle$

$Q = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

$q_0 = 0$

$F = \{8\}$

$\Gamma = \{a, b, c, d, g, h\}$

$\Sigma = \{a, b\}$

δ:

Q\taśma	¢	a	b	c	d	g	h	$
0	0,¢,R	0,a,R	1,d,L					
1		2,c,R		1,c,L	1,d,L			
2		3,a,L	1,d,L	2,c,R	2,d,R			
3	4,¢,R			3,c,L	3,d,L			
4		5,g,L		4,c,R	4,d,R			
5					6,h,R	5,g,L	5,h,L	
6		5,g,L				6,g,R	6,h,R	7,$,L
7				8,c,R		7,g,L	7,h,L	
8						8,g,R	8,h,R	

Symulacja działania automatu

	¢	0	a		a		b		b		a	a	$
	¢		a	0	a		b		b		a	a	$
	¢		a		a	0	b		b		a	a	$
	¢		a	1	a		*d*		b		a	a	$
	¢		a		*c*	2	*d*		b		a	a	$
	¢		a		*c*		*d*	2	b		a	a	$
	¢		a		*c*	1	*d*		*d*		a	a	$
	¢		a	1	*c*		*d*		*d*		a	a	$
	¢	1	a		*c*		*d*		*d*		a	a	$
	¢		*c*	2	*c*		*d*		*d*		a	a	$
	¢		*c*		*c*	2	*d*		*d*		a	a	$
	¢		*c*		*c*		*d*	2	*d*		a	a	$
	¢		*c*		*c*		*d*		*d*	2	a	a	$
	¢		*c*		*c*		*d*	3	*d*		a	a	$
	¢		*c*		*c*	3	*d*		*d*		a	a	$
	¢		*c*	3	*c*		*d*		*d*		a	a	$
	¢	3	*c*		*c*		*d*		*d*		a	a	$
3	¢		*c*		*c*		*d*		*d*		a	a	$
	¢	4	*c*		*c*		*d*		*d*		a	a	$
	¢		*c*	4	*c*		*d*		*d*		a	a	$
	¢		*c*		*c*	4	*d*		*d*		a	a	$
	¢		*c*		*c*		*d*	4	*d*		a	a	$
	¢		*c*		*c*		*d*		*d*	4	a	a	$

¢	*c*		*c*		*d*	5	*d*		**g**		a		$
¢	*c*		*c*		*d*		**h**	6	**g**		a		$
¢	*c*		*c*		*d*		**h**		**g**	6	a		$
¢	*c*		*c*		*d*		**h**	5	**g**		**g**		$
¢	*c*		*c*		*d*	5	**h**		**g**		**g**		$
¢	*c*		*c*	5	*d*		**h**		**g**		**g**		$
¢	*c*		*c*		**h**	6	**h**		**g**		**g**		$
¢	*c*		*c*		**h**		**h**	6	**g**		**g**		$
¢	*c*		*c*		**h**		**h**		**g**	6	**g**		$
¢	*c*		*c*		**h**		**h**		**g**		**g**	6	$
¢	*c*		*c*		**h**		**h**		**g**	7	**g**		$
¢	*c*		*c*		**h**		**h**	7	**g**		**g**		$
¢	*c*		*c*		**h**	7	**h**		**g**		**g**		$
¢	*c*		*c*	7	**h**		**h**		**g**		**g**		$
¢	*c*	7	*c*		**h**		**h**		**g**		**g**		$
¢	*c*		*c*	8	**h**		**h**		**g**		**g**		$
¢	*c*		*c*		**h**	8	**h**		**g**		**g**		$
¢	*c*		*c*		**h**		**h**	8	**g**		**g**		$
¢	*c*		*c*		**h**		**h**		**g**	8	**g**		$
¢	*c*		*c*		**h**		**h**		**g**		**g**	8	$

„Deterministyczny” automat liniowo ograniczony równoważny automatowi niedeterministycznemu

Klasa deterministycznych automatów liniowo ograniczonych i klasa niedeterministycznych automatów liniowo ograniczonych nie są sobie równoważne. Przekształcając automat niedeterministyczny na równoważny mu automat deterministyczny dostajemy automat deterministyczny właściwie nie będący automatem liniowo ograniczonym w sensie poprzednio prezentowanej definicji. Długość taśmy, na której prowadzi obliczenie automat deterministyczny symulujący obliczenie automatu niedeterministycznego jest funkcją kwadratową długości taśmy, na której prowadzi obliczenie automat niedeterministyczny (równej długości analizowanego słowa wejściowego).

Gramatyka bez ograniczeń $\Rightarrow$ gramatyka kontekstowa

(1) $S \rightarrow ACaB$

(2) $Ca \rightarrow aaC$

(3) $CB \rightarrow DB$

(4) $CB \rightarrow E$

(5) $aD \rightarrow Da$

(6) $AD \rightarrow AC$

(7) $aE \rightarrow Ea$

(8) $AE \rightarrow \varepsilon$

Gramatyka ta generuje język $\{ a^i \mid i = 2^n,\ n > 0 \}$. Nieterminale A i B pełnią odpowiednio rolę lewego i prawego znacznika końca form zdaniowych, C jest znacznikiem, który przesuwa się przez łańcuch symboli a pomiędzy A a B, podwajających liczbę za pomocą produkcji (2). Gdy C zderzy się z prawym znacznikiem końca czyli z B, wtedy przekształca się w D lub E za pomocą produkcji (3) lub (4). Jeśli wybrane zostanie D, to wędruje ono w lewo na mocy produkcji (5), dopóki nie zostanie osiągnięty lewy znacznik końca A. W tym momencie D zamienia się ponownie w C na mocy produkcji (6) i cały proces rozpoczyna się na nowo. Jeśli zostanie wybrane E, to prawy znacznik końca zostanie pochłonięty. Następnie E wędruje w lewo na mocy produkcji (7) i pochłania lewy znacznik końca, pozostawiając łańcuch złożony z 2^n symboli a dla pewnego $n > 0$.

Gramatyka bez ograniczeń $\Rightarrow$ gramatyka kontekstowa

(1) $S \to ACaB$
(2) $Ca \to aaC$
(3) $CB \to DB$
(4) $CB \to E$
(5) $aD \to Da$
(6) $AD \to AC$
(7) $aE \to Ea$
(8) $AE \to \varepsilon$

Powyższa gramatyka zawiera dwie produkcje sprzeczne z definicją gramatyki kontekstowej (monotonicznej). Są nimi produkcje
(1) $CB \to E$
(2) $AE \to \varepsilon$
Możemy jednak utworzyć gramatykę kontekstową (monotoniczną) dla języka $\{ a^i \mid i = 2^n, n > 0 \}$ uprzytomniając sobie, że A, B, C, D i E nie są niczym innym, jak tylko znacznikami, które w końcu znikają. Zamiast więc używać dla nich oddzielnych symboli, możemy włączyć te znaczniki do symboli a poprzez utworzenie nieterminali "złożonych" typu [CaB], który to zapis jest pojedynczym nowym symbolem nieterminalnym pojawiającym się zamiast łańcucha CaB.

Gramatyka bez ograniczeń $\Rightarrow$ gramatyka kontekstowa

(1) $S \to ACaB$

(2) $Ca \to aaC$

(3) $CB \to DB$

(4) $CB \to E$

(5) $aD \to Da$

(6) $AD \to AC$

(7) $aE \to Ea$

(8) $AE \to \varepsilon$

(1) S $\to$ [ACaB]

(2) [Ca] a $\to$ a a [Ca]

[Ca] [aB] $\to$ a a [CaB]

[ACa] a $\to$ [Aa] a [Ca]

[ACa] [aB] $\to$ [Aa] a [CaB]

[ACaB] $\to$ [Aa] [aCB]

[CaB] $\to$ a [aCB]

(3) [aCB] $\to$ [aDB]

(4) [aCB] $\to$ [aE]

(5) a [Da] $\to$ [Da] a

[aDB] $\to$ [DaB]

[Aa] [Da] $\to$ [ADa] a

a [DaB] $\to$ [Da] [aB]

[Aa] [DaB] $\to$ [ADa] [aB]

(6) [ADa] $\to$ [ACa]

(7) a [Ea] $\to$ [Ea] a

[aE] $\to$ [Ea]

[Aa] [Ea] $\to$ [AEa] a

(8) [AEa] $\to$ a

Zamkniętość klasy języków kontekstowych

Języki kontekstowe są zamknięte ze względu na:

- podstawienie,
- homomorfizm (bez ε),
- przecięcie,
- sumę teoriomnogościową,
- złożenie,
- plus Kleene'go.

Zamkniętość języków kontekstowych ze względu na:

- dopełnienie
- przeciwobraz homomorficzny

jest różnie podawana w podręcznikach.