



AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA
IM. STANISŁAWA STASZICA W KRAKOWIE

Estymacja przedziałowa

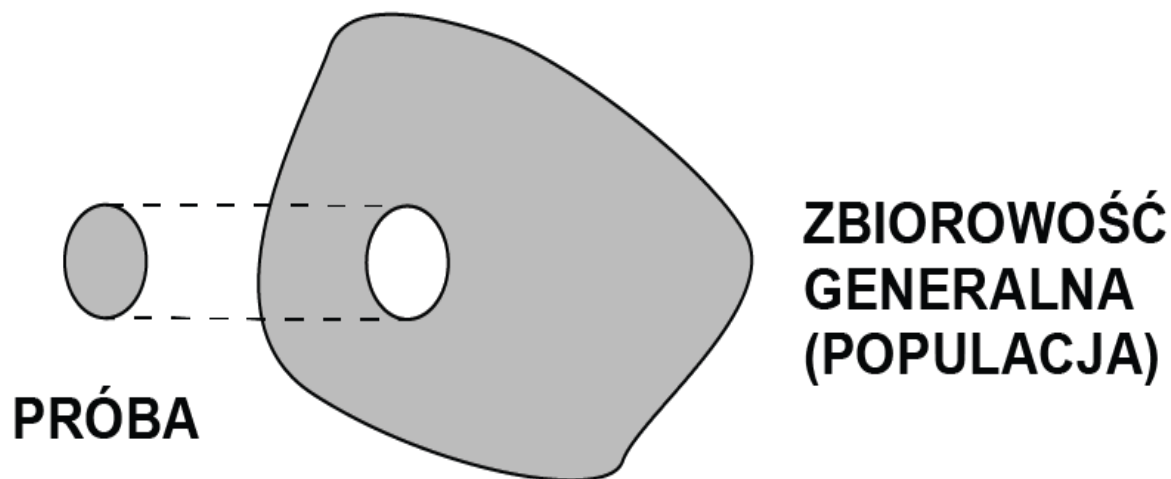
Statystyka w medycynie

Dr inż. Janusz Majewski
Katedra Informatyki

Populacja, próba, wnioskowanie

Statystyka jest nauką o **wnioskowaniu**, nauką o uogólnianiu polegającym na przechodzeniu od części (losowo wybranej **próby**) do całości (**populacji**). Populacja to zbiór wszystkich pomiarów, które nas interesują, a próba to podzbiór pomiarów wybranych z populacji. **Losowa próba** n -elementowa to próba wybrana w taki sposób, że każdy zbiór n elementów ma takie same szanse znalezienia się w próbie, jak każdy inny zbiór n elementów populacji.

Populacja, próba, estymacja



na podstawie
wyników
próby



OBLICZAMY



**CHARAKTERYZUJE
SIĘ**

średnia z próby

wariancja z próby

odchylenie standardowe



wartość oczekiwana (średnia)

wariancja populacji

odchylenie standardowe

Populacja, próba, estymacja

Średnia z próby:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

Wariancja z próby:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}$$

jest estymatorem

jest estymatorem

Wartość średnia populacji:

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x f_x(x) dx$$

Wariancja populacji:

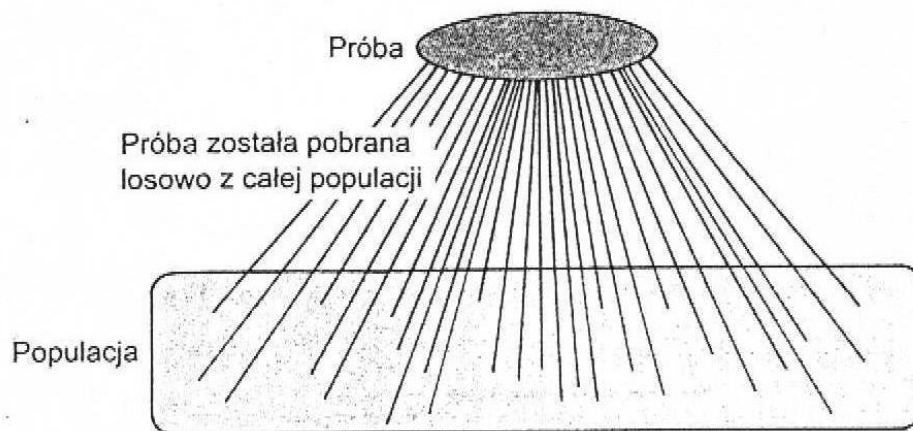
$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f_x(x) dx$$

$f_x(x)$ - jest nieznane

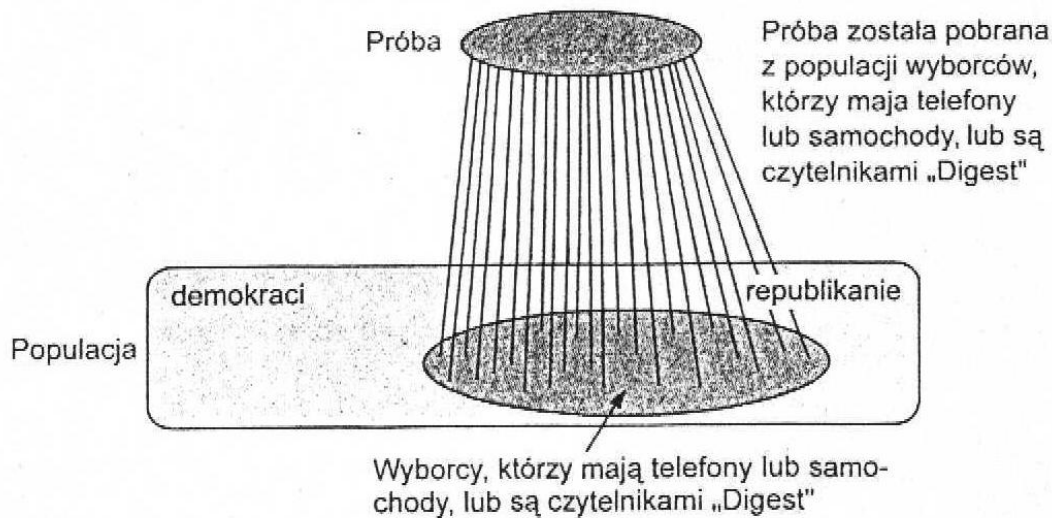
μ - jest nieznane

Procedura pobierania próby

Poprawna procedura pobierania próby



Przedwyborczy sondaż „Literary Digest”



Wybory prezydenckie w USA w 1936 r.

Sondaż przedwyborczy czasopisma „Literary Digest”:

- Gubernator Kansas Alfred M. Landon (republikanin) zwycięży w 32 stanach na 48 stanów i pokona prezydenta Franklina D. Roosevelta (demokratę).

Wyniki wyborów:

- Franklin D. Roosevelt wygrał w 46 stanach i został wybrany prezydentem USA pokonując Alfreda M. Landona, który zwyciężył zaledwie w 2 stanach.

Estymacja

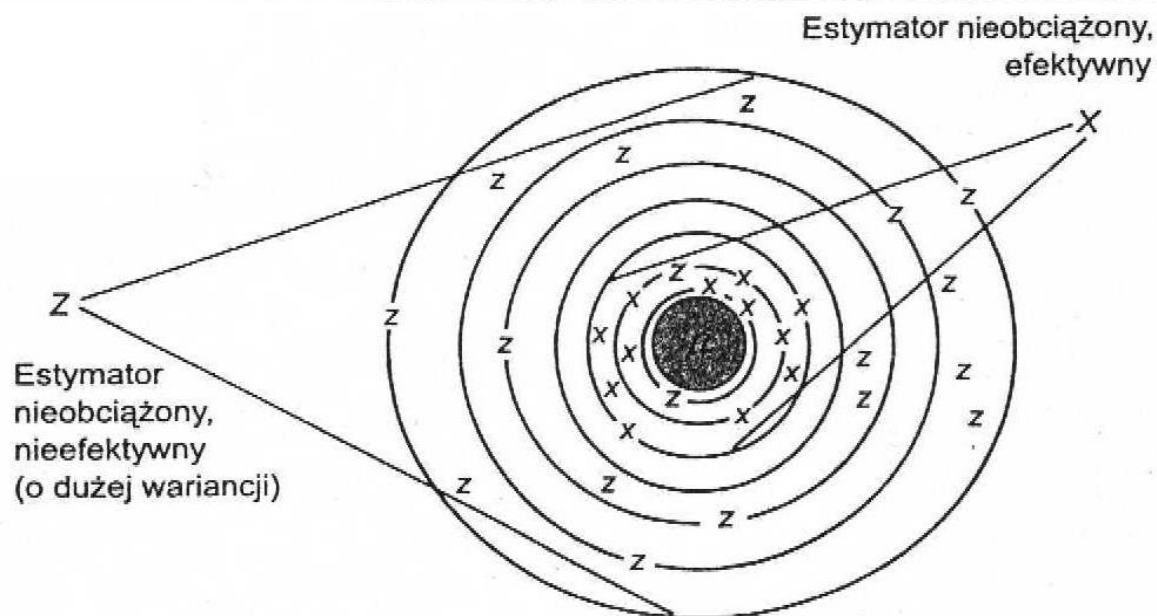
Statystyka z próby: zmienna losowa będąca dowolną funkcją wyników próby losowej, np. średnia z próby $\bar{x}$, wariancja z próby s^2

Estymator: dowolna statystyka Z służąca do oszacowania nieznanej wartości θ parametru populacji generalnej.

Estymator efektywny: estymator Z o możliwie małym rozrzucie (małej wariancji $\sigma^2(Z)$). Stosowanie estymatora efektywnego oznacza popełnianie małego błędu przeciętnego szacunku.

Estymator efektywny

Estymator jest **efektywny**, jeżeli ma niewielką wariancję (a tym samym niewielkie odchylenie standardowe).



Rysunek 5.11. Dwa nieobciążone estymatory parametru μ ; estymator X jest efektywniejszy od estymatora Z

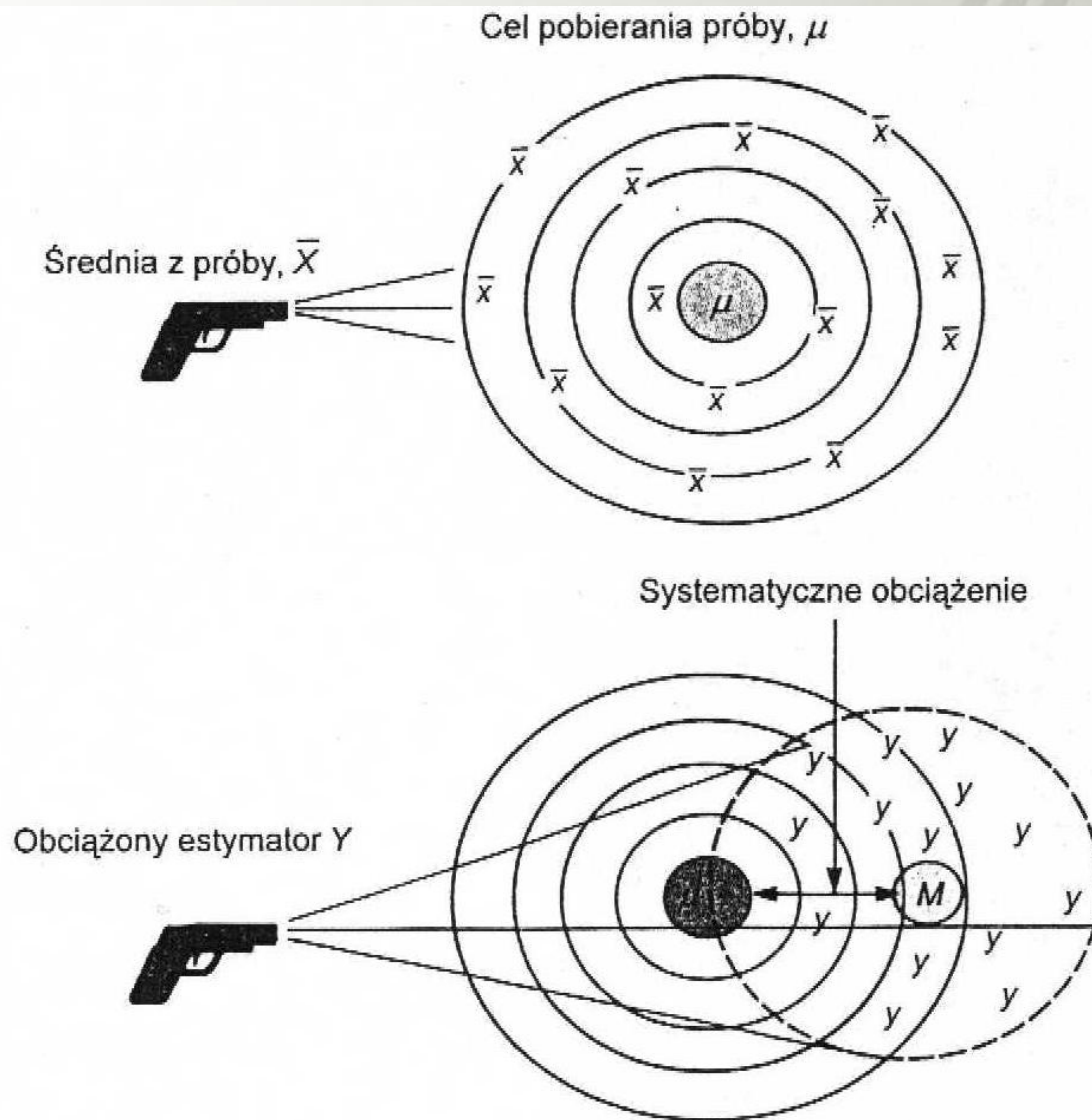
Estymacja

Estymator zgodny: estymator Z parametru θ spełniający warunek $\lim_{n \rightarrow \infty} P\{|Z_n - \theta| < \varepsilon\} = 1$, tzn. estymator zapewniający, że stosowanie większych liczebności próby poprawia dokładności szacunku.

Estymator dostateczny: estymator Z wykorzystujący wszystkie informacje (wszystkie dane) zawarte w próbie (np. mediana z próby nie jest estymatorem dostatecznym, gdyż zależy tylko od jednej lub dwóch „środkowych” danych z próby).

Estymator nieobciążony: estymator Z spełniający równość $E(Z) = \theta$, oznaczającą, że Z szacuje nieznaną wartość θ parametru populacji bez błędu systematycznego.

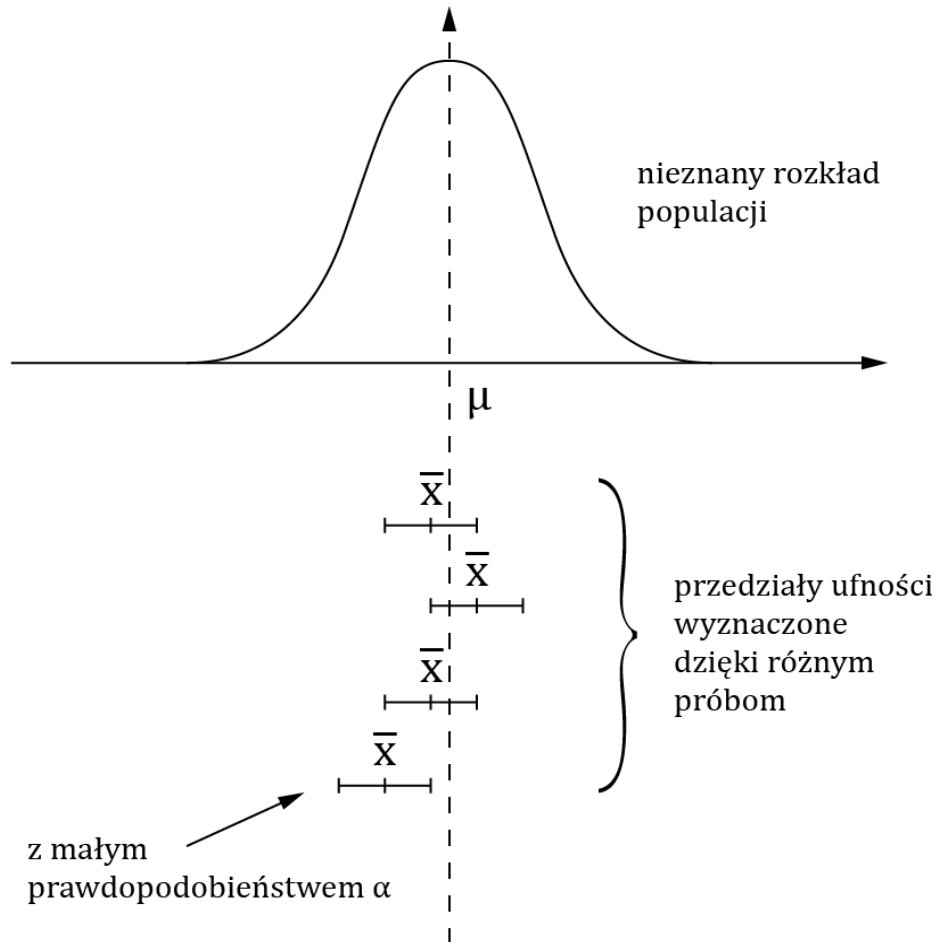
Estymator nieobciążony



Estymacja przedziałowa

Estymacja przedziałowa polega na szacowaniu nieznanego parametru populacji poprzez budowę przedziału, który z zadaniem z góry prawdopodobieństwem pokrywałby nieznaną wartość parametru. Poszukiwany w zadaniu przedział nazywany jest przedziałem ufności, zaś ustalone a priori prawdopodobieństwo, z którym przedział ufności ma pokrywać nieznaną wartość parametru, nosi nazwę współczynnika ufności (poziomu ufności).

Estymacja przedziałowa



Estymacja przedziałowa

Table 1a. Age-adjusted prevalence of diagnosed and undiagnosed diabetes among adults aged ≥18 years, United States, 2011–2014

Characteristic	Diagnosed diabetes Percentage (95% CI)	Undiagnosed diabetes Percentage (95% CI)	Total Percentage (95% CI)
Total	8.7 (8.1–9.4)	2.7 (2.3–3.3)	11.5 (10.7–12.4)
Sex			
Women	8.5 (7.5–9.5)	2.3 (1.8–3.1)	10.8 (9.8–11.9)
Men	9.1 (8.4–9.9)	3.2 (2.4–4.3)	12.3 (11.3–13.4)
Race/Ethnicity			
Asian, non-Hispanic	10.3 (8.6–12.4)	5.7 (4.0–8.2)	16.0 (13.6–18.9)
Black, non-Hispanic	13.4 (12.2–14.6)	4.4 (3.0–6.2)	17.7 (15.8–19.9)
Hispanic	11.9 (10.3–13.7)	4.5 (3.2–6.2)	16.4 (14.1–18.9)
White, non-Hispanic	7.3 (6.6–8.1)	2.0 (1.5–2.6)	9.3 (8.4–10.2)
Education			
Less than high school	11.4 (9.9–13.1)	4.1 (3.0–5.6)	15.5 (13.5–17.7)
High school	10.3 (8.8–12.0)	3.2 (2.4–4.2)	13.5 (11.9–15.2)
More than high school	7.4 (6.6–8.4)	2.2 (1.6–3.0)	9.6 (8.6–10.7)

CI = confidence interval.

Data source: 2011–2014 National Health and Nutrition Examination Survey.

Estymacja przedziałowa średniej

Szacowanym nieznanym parametrem jest nieznaną średnia populacji μ . Szacowanie odbywa się na podstawie średniej $\bar{x}$ z próby zawierającej n elementów. Średnia z próby $\bar{x}$ jest zmienną losową: o własnościach wyspecyfikowanych na następnym slajdzie.

Estymacja przedziałowa średniej (centralne twierdzenie graniczne)

a) $E(\bar{x}) = \mu$

Wszystkie średnie z prób grupują się wokół rzeczywistej średniej populacji

b) $\sigma^2(\bar{x}) = \frac{\sigma^2}{n}$

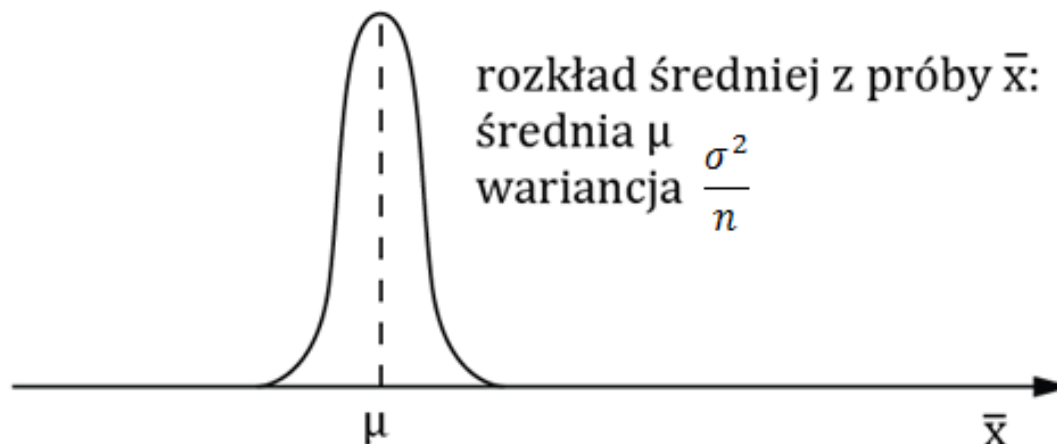
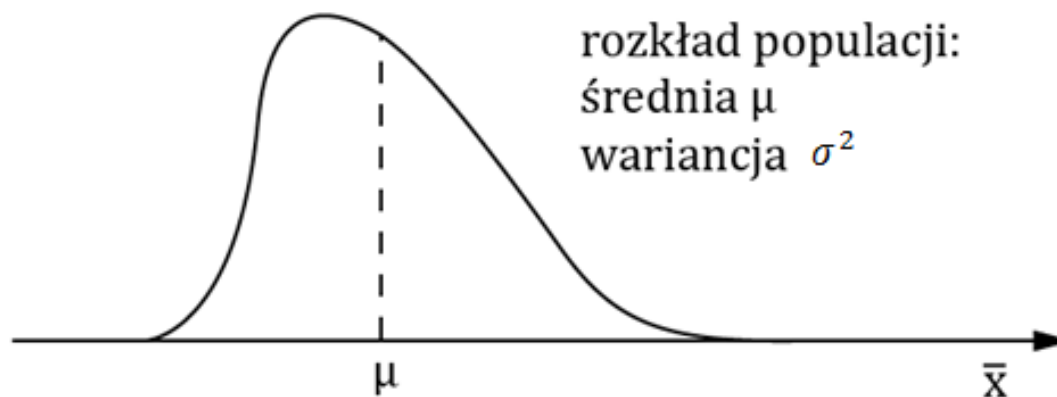
σ^2 - prawdziwa wariancja populacji, n - liczebność próby

Średnie z prób mają tym mniejszy rozrzut im większa jest próba, a tym większy rozrzut, im większy jest rozrzut w populacji generalnej.

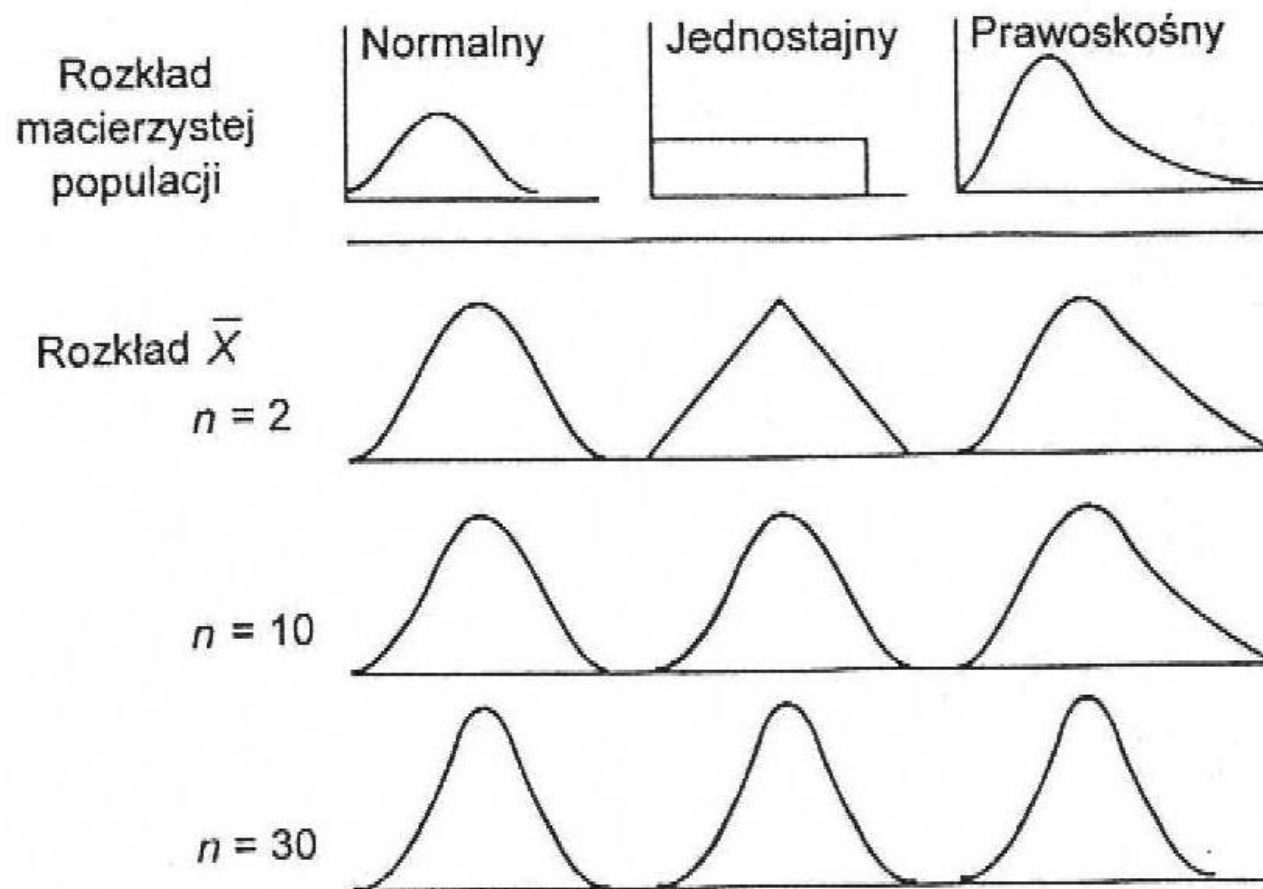
c) Jeżeli rozkład populacji jest normalny, to rozkład średniej z próby też jest normalny.

Jeżeli nawet rozkład populacji odbiega od normalnego, to rozkład średniej z próby w miarę wzrostu n zbliża się do rozkładu normalnego

Estymacja przedziałowa średniej

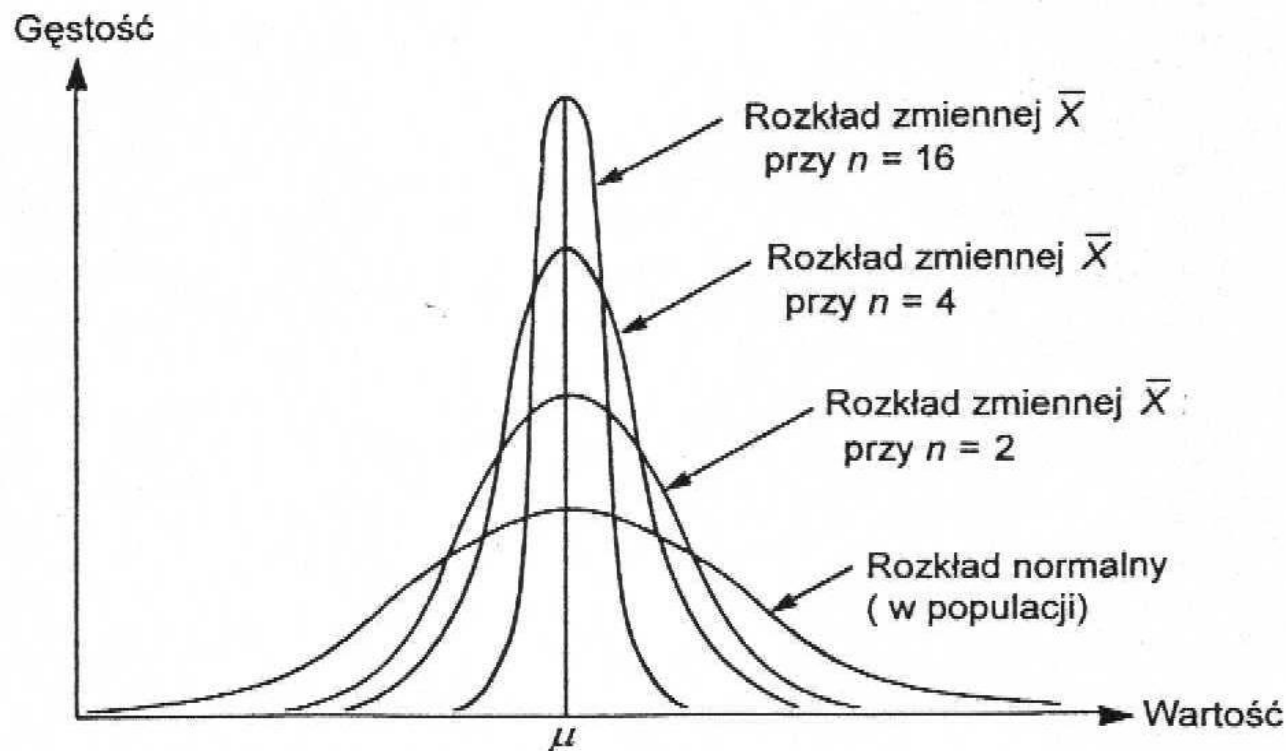


Rozkład średniej z próby



Rysunek 5.6. Znaczenie centralnego twierdzenia granicznego: rozkład średniej z próby, $\bar{X}$, dla różnych populacji i różnych liczebności próby

Rozkład średniej z próby



Rysunek 5.4. Normalny rozkład w populacji i rozkład średniej z próby, $\bar{X}$, o różnej liczebności

Estymacja przedziałowa średniej

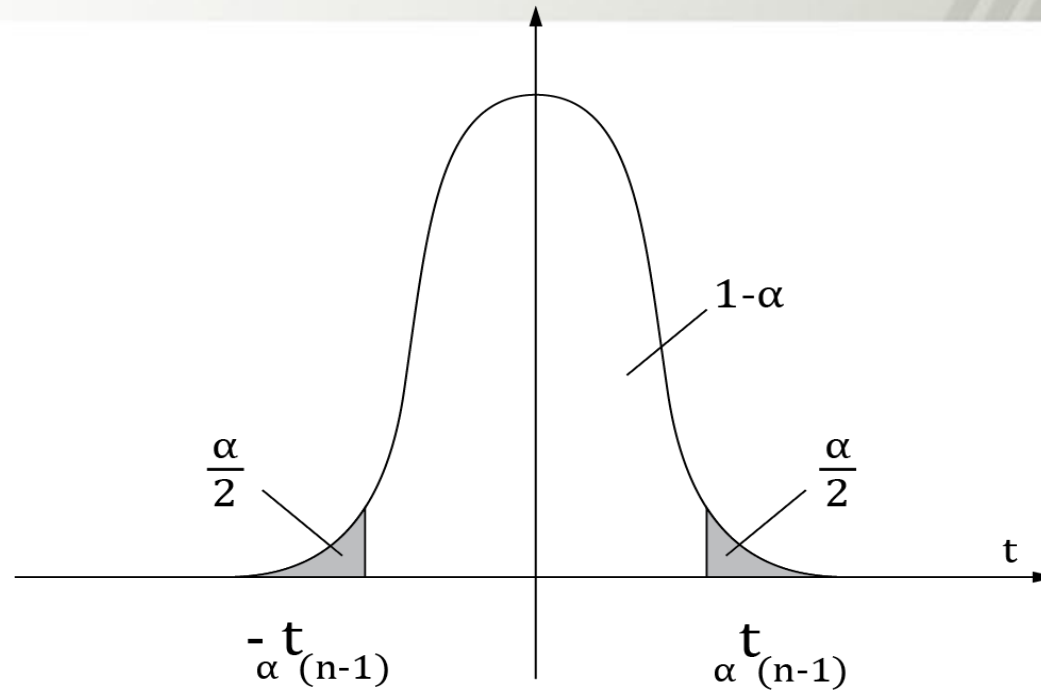
Z faktu, że $\bar{x}$ ma rozkład normalny lub zbliżony do normalnego nie można bezpośrednio skorzystać, bo σ^2 populacji nie jest znana. Wykorzystujemy statystykę t :

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

$\frac{s}{\sqrt{n}}$ - Odchylenie standardowe średniej z próby zwane błędem standardowym średniej

Statystyka t ma rozkład t-Studenta o $n - 1$ stopniach swobody

Estymacja przedziałowa średniej



Z dużym prawdopodobieństwem $1 - \alpha$ zmienna t wyznaczona z próby znajduje się w przedziale:

$$-\alpha t_{(n-1)} < t < \alpha t_{(n-1)}$$

$\alpha t_{(n-1)}$ - wart. krytyczna odczytana z tablic

Estymacja przedziałowa średniej

$$-_{\alpha} t_{(n-1)} < t < {}_{\alpha} t_{(n-1)}$$

uwzględniając, że

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

mamy

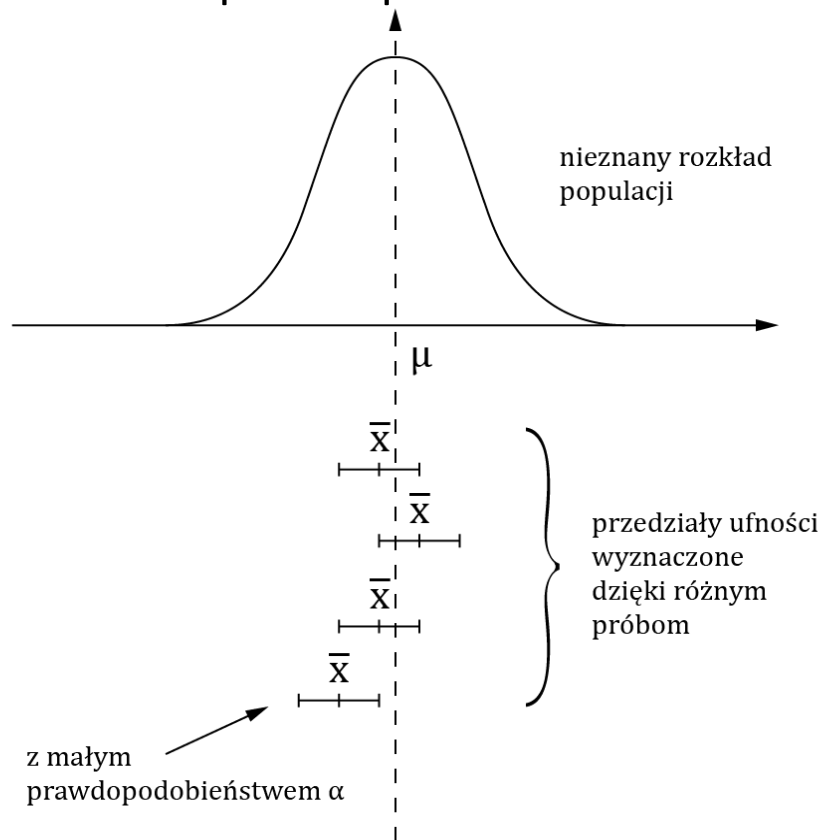
$$-_{\alpha} t_{(n-1)} < \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} < {}_{\alpha} t_{(n-1)}$$

$$\bar{x} - \frac{{}_{\alpha} t_{(n-1)} s}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + \frac{{}_{\alpha} t_{(n-1)} s}{\sqrt{n}}$$

Estymacja przedziałowa średniej

$$\bar{x} - \frac{\alpha t_{(n-1)} s}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + \frac{\alpha t_{(n-1)} s}{\sqrt{n}}$$

Tak określony przedział ufności z prawdopodobieństwem $1 - \alpha$ obejmuje nieznaną wartość μ .



Estymacja przedziałowa średniej

Na ogół poziom ufności $1-\alpha$ wynosi **0.9, 0.95, 0.99**.

Im bliższy 1 jest współczynnik ufności, tym szerszy przedział ufności.

Dla dużych prób ($n > 100$) zamiast statystyki t stosuje się statystykę u :

$$u = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

mającą standaryzowany rozkład normalny.

Wówczas przedział ufności dla średniej jest określany jako:

$$\bar{x} - \frac{\alpha u s}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + \frac{\alpha u s}{\sqrt{n}}$$

Estymacja przedziałowa średniej

Wartości krytyczne $_{\alpha}u$ rozkładu normalnego standaryzowanego

$1 - \alpha$	α	$_{\alpha}u$
0.9	0.1	1.645
0.95	0.05	1.960
0.99	0.01	2.576

Estymacja przedziałowa średniej

Wiek pacjentek z nowotworem szyjki macicy w pewnym szpitalu w Algierii

wiek	liczba pacjentek	środek przedziału wiekowego	$D = ((C) - 50.9) ** 2$	$E = (D) * (B)$
(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
20-25	3	22,5	806,6	2419,68
25-30	10	25,5	645,2	6451,6
30-35	38	32,5	338,6	12865,28
35-40	71	37,5	179,6	12748,76
40-45	117	42,5	70,6	8255,52
45-50	100	47,5	11,6	1156
50-55	89	52,5	2,6	227,84
55-60	75	57,5	43,6	3267
60-65	70	62,5	134,6	9419,2
65-70	59	67,5	275,6	16258,04
70-75	21	72,5	466,6	9797,76
75-80	11	77,5	707,6	7783,16
80-85	1	82,5	998,6	998,56
85-90	2	87,5	1339,6	2679,12
Suma	667			94327,52

Średnia z próby:	50,9
Wariancja z próby:	141,6
Odchylenie stand. z próby:	11,9
Błąd stand. średniej:	0,5
Szer. 99% przedz. ufności śr.:	1,2
Dolna granica przedz. ufności.:	49,7
Górna granica przedz. ufności.:	52,1
Szer. 95% przedz. ufności śr.:	0,9
Dolna granica przedz. ufności.:	50
Górna granica przedz. ufności.:	51,8

Estymacja przedziałowa frakcji

Próba polegała na wykonaniu n doświadczeń, z których r dało wynik pozytywny (sukces).

Frakcja obliczona z próby:

$$p = \frac{r}{n}$$

jest estymatorem nieznanego parametru π (prawdopodobieństwo sukcesu) populacji generalnej, przy czym:

$$E(p) = \pi$$

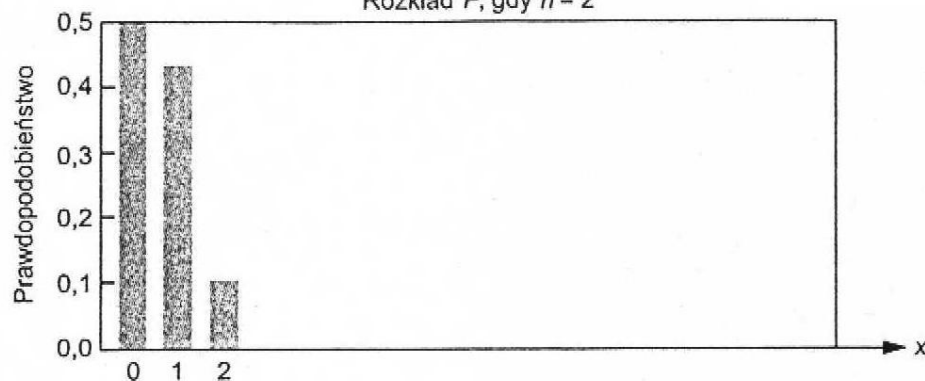
$$\sigma^2(p) = \frac{\pi (1 - \pi)}{n}$$

zaś zmienna $r = p n$ ma rozkład dwumianowy.

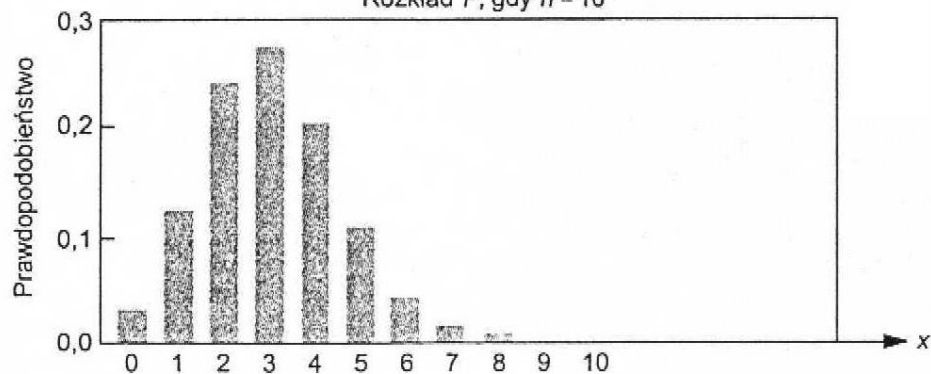
Rozkład ten w miarę wzrostu wielkości próby n zmierza do rozkładu normalnego.

Rozkład frakcji z próby

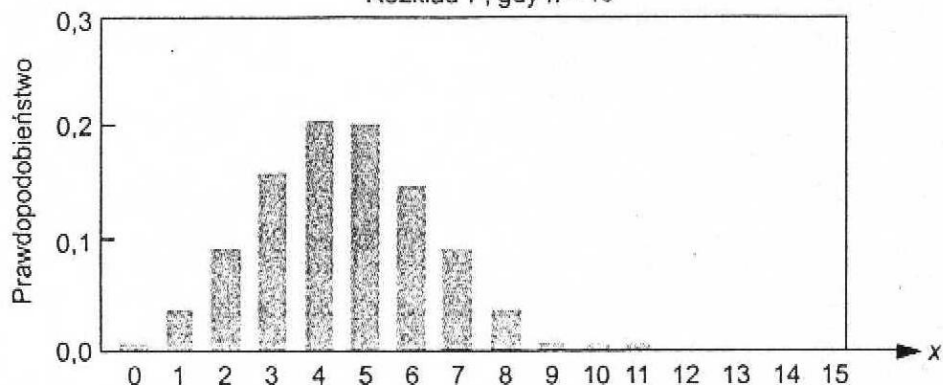
Rozkład $\hat{P}$, gdy $n = 2$



Rozkład $\hat{P}$, gdy $n = 10$



Rozkład $\hat{P}$, gdy $n = 15$



Estymacja przedziałowa frakcji

Założmy, że próba jest duża ($n > 100$) oraz nieznany parametr π nie jest zbyt mały ($\pi > 0.05$). Wówczas przedział ufności dla π ze współczynnikiem ufności równym $1 - \alpha$ jest określony jako:

$$p \pm_{\alpha} u \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

$$\sigma(p) = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \quad - \quad \text{Błąd standardowy frakcji}$$

Jeśli założenia powyższe nie są spełnione, należy wykorzystać informacje o rozkładzie dwumianowym (patrz [Parker]).

Estymacja przedziałowa frakcji

Przykład:

Wylosowano 150 studentów pewnej uczelni, z nich 105 paliło tytoń.

$$n = 150$$

$$r = 105$$

$$p = \frac{105}{150} = 0.7$$

$$z_{0.05} = 1.96$$

$$z \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = 0.073 \approx 0.07$$

$$\pi = 0.7 \pm 0.07$$

$$0.63 < \pi < 0.77$$

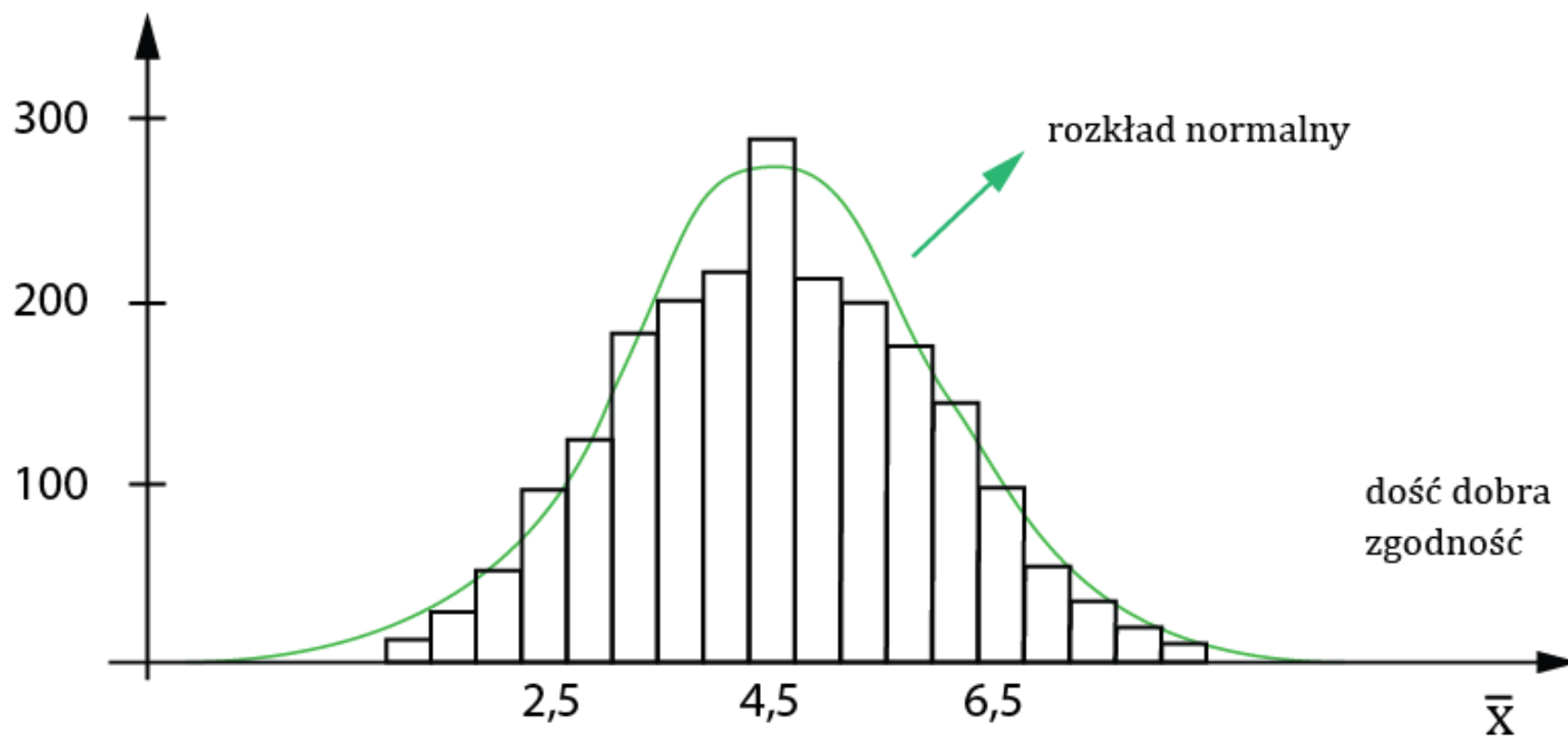
Estymacja przedziałowa wariancji

Wszelkie sposoby wnioskowania dotyczące wariancji są znacznie bardziej czułe na odchyłki rozkładu rzeczywistego populacji od rozkładu normalnego, niż metody dotyczące średniej. Należy więc najpierw sprawdzić, czy można uważać, iż próbka została wylosowana z populacji o rozkładzie normalnym.

Przykład: Wylosowano 2000 próbek 5-elementowych w populacji o rozkładzie skokowym równomiernym (10 cyfr od 0 do 9 z prawdopodobieństwem $1/10$ dla każdej cyfry). Uzyskano 2000 średnich $\bar{x}$ z tych próbek oraz 2000 oszacowań wariancji s^2 . Oto histogramy średnich i wariancji wraz z rozkładami teoretycznymi.

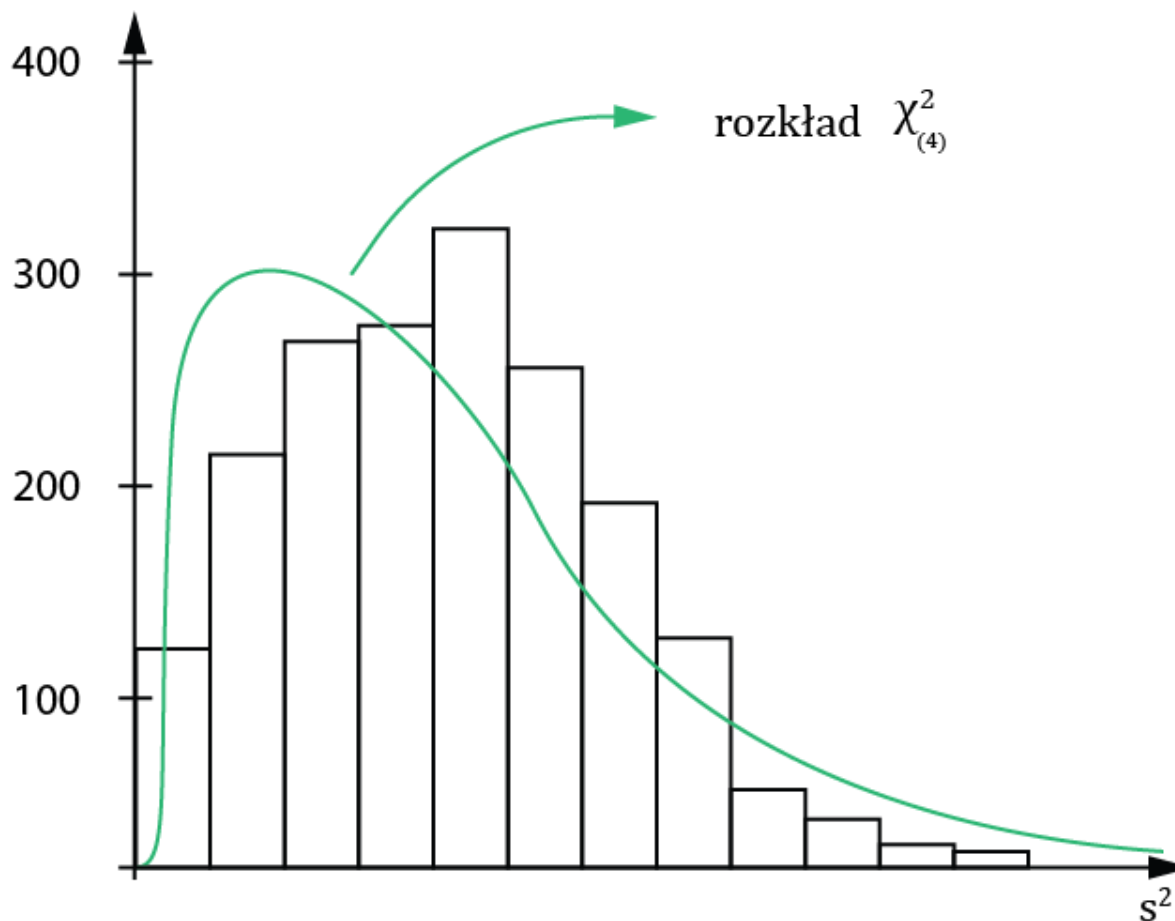
Estymacja przedziałowa wariancji

HISTOGRAM ŚREDNICH Z PRÓBY



Estymacja przedziałowa wariancji

HISTOGRAM WARIANCJI Z PRÓBY



Estymacja przedziałowa wariancji

Estymatorem nieznanej wariancji populacji σ^2 jest nieobciążony estymator s^2 , przy czym:

$$E(s^2) = \sigma^2$$

$$\sigma^2(s^2) = \frac{\sigma^2}{n-1}$$

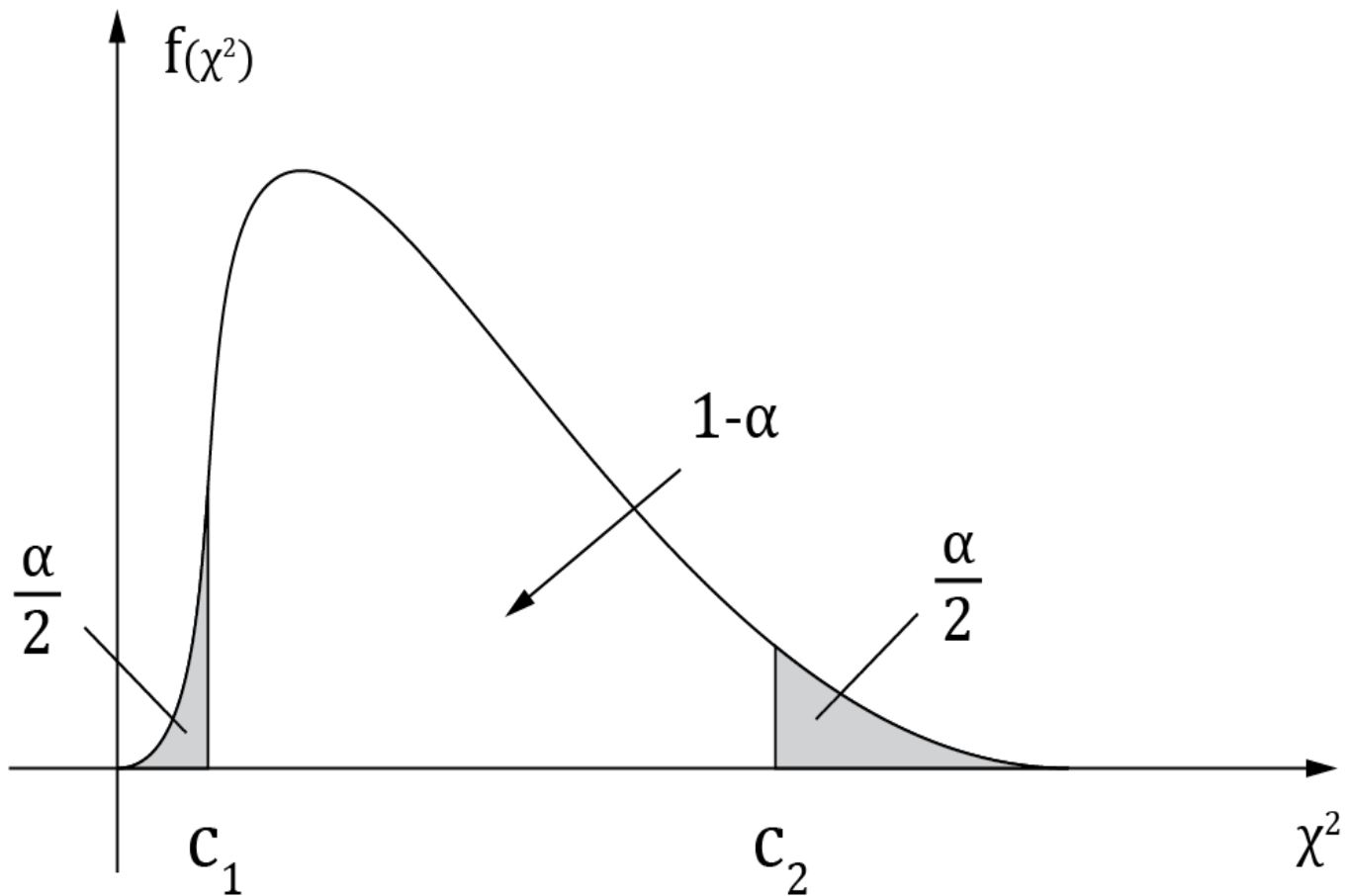
gdzie: n - liczebność próby

Statystyka χ^2 :

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}$$

ma rozkład χ^2 o $n-1$ stopniach swobody

Estymacja przedziałowa wariancji



Estymacja przedziałowa wariancji

Przedział ufności dla σ^2 ze współczynnikiem ufności $1 - \alpha$ określamy jako:

$$\frac{(n-1)s^2}{c_2} < \sigma^2 < \frac{(n-1)s^2}{c_1}$$

$c_1 = {}_{1-\frac{\alpha}{2}}\chi^2_{(n-1)}$ oraz $c_2 = \frac{\alpha}{2}\chi^2_{(n-1)}$ - wartości krytyczne odczytane z tablic

Estymacja przedziałowa wariancji

Jeżeli dysponujemy dużą próbą ($n > 100$) pobraną z populacji o rozkładzie normalnym lub zbliżonym do normalnego, to na podstawie estymatora s wyznaczonego z tej próby możemy w przybliżeniu oszacować odchylenie standardowe σ populacji według poniższej zależności:

$$\frac{s}{1 + \frac{\alpha u}{\sqrt{2n}}} < \sigma < \frac{s}{1 - \frac{\alpha u}{\sqrt{2n}}}$$

gdzie αu jest wartością krytyczną standaryzowanego rozkładu normalnego.

Szacowanie niezbędnej liczebności próby

Szacowanie niezbędnej liczby doświadczeń przy estymowaniu średniej

Wykonaliśmy n_0 pomiarów. Na podstawie n_0 -elementowej próby próbujemy oszacować jaka jest niezbędna liczba pomiarów, aby uzyskać z góry założoną szerokość d przedziału ufności dla średniej.

$\bar{x} \pm d$ - przedział ufności

$$d = \alpha t \frac{s}{\sqrt{n}} \quad \text{stąd} \quad n = \frac{s^2 \alpha^2 t^2}{d^2}$$

$s^2, \alpha t$ - na podstawie n_0 pomiarów

Należy jeszcze wykonać około $n - n_0$ pomiarów

Szacowanie niezbędnej liczebności próby

Przykład: W badaniu taksonomicznym chcemy oszacować długość określonej struktury z danej populacji z dokładnością ± 1.00 mm przy poziomie ufności 0.95. Po wykonaniu 26 pomiarów oszacowano odchylenie standardowe, które wynosiło 4 mm. Ile pomiarów należy jeszcze wykonać?

$$d = 1, \quad s = 4, \quad {}_{0.05}t_{(25)} = 2.06, \quad n_0 = 26$$

$$n = \frac{(2.06)^2 4^2}{1^2} = 69.32 \approx 70$$

Należy jeszcze wykonać około $n - n_0 = 70 - 26 = 44$ pomiary.

Szacowanie niezbędnej liczebności próby

Szacowanie niezbędnej liczby doświadczeń przy estymowaniu frakcji

$p \pm d$ - przedział ufności

$$d = {}_{\alpha}u \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

$$n = \frac{{}_{\alpha}u^2 p(1-p)}{d^2}$$

$p(1-p)$ - określane na podstawie n_0 doświadczeń

Należy wykonać dodatkowo $n - n_0$ doświadczeń.

Szacowanie niezbędnej liczebności próby

Przykład: Przeprowadzono wywiad z 150 studentami. Z tego 105 paliło systematycznie tytoń. Z iloma studentami należy dodatkowo przeprowadzić wywiad, aby oszacować procent palących z dokładnością co najwyżej $\pm 3\%$ przy współczynniku ufności $1 - \alpha = 0.95$

$$n_0 = 150 \quad p = \frac{105}{150} = 0.7 \quad z_{\alpha/2} = 1.96 \quad d = 0.03$$

$$n = \frac{(1.96)^2 \cdot 0.7 \cdot 0.3}{(0.03)^2} = 896.4 \approx 897$$

Należy jeszcze dodatkowo rozmawiać z około $n - n_0 = 897 - 150 = 747$ studentami.

Szacowanie niezbędnej liczebności próby

Przykład c.d. (to samo zadanie dla innych wymagań): Przeprowadzono wywiad z 150 studentami. Z tego 105 paliło systematycznie tytoń. Z iloma studentami należy dodatkowo przeprowadzić wywiad, aby oszacować procent palących z dokładnością co najwyżej $\pm 2\%$ przy współczynniku ufności $1 - \alpha = 0.95$

$$n_0 = 150 \quad p = \frac{105}{150} = 0.7 \quad z_{\alpha/2} = 1.96 \quad d = 0.02$$

$$n = \frac{(1.96)^2 \cdot 0.7 \cdot 0.3}{(0.02)^2} = 2016.8 \approx \mathbf{2017}$$

Należy jeszcze dodatkowo rozmawiać z około $n - n_0 = 2017 - 150 = 1867$ studentami.

Szacowanie niezbędnej liczebności próby

Przykład c.d. (jeszcze raz to samo zadanie, ale dla innych danych):

Przeprowadzono wywiad z 150 studentami. Z tego **75** paliło systematycznie tytoń. Z iloma studentami należy dodatkowo przeprowadzić wywiad, aby oszacować procent palących z dokładnością co najwyżej **$\pm 2\%$** przy współczynniku ufności $1 - \alpha = 0.95$

$$n_0 = 150 \quad p = \frac{75}{150} = \mathbf{0.5} \quad z_{\alpha/2} = 1.96 \quad d = 0.02$$

$$n = \frac{(1.96)^2 \cdot 0.5 \cdot 0.5}{(0.02)^2} = \mathbf{2401}$$

Należy jeszcze dodatkowo rozmawiać z około $n - n_0 = 2401 - 150 = 2251$ studentami.

Szacowanie niezbędnej liczebności próby

Przykład c.d. (jeszcze raz to samo zadanie, ale dla innych danych):

Przeprowadzono wywiad z 150 studentami. Z tego **75** paliło systematycznie tytoń. Z iloma studentami należy dodatkowo przeprowadzić wywiad, aby oszacować procent palących z dokładnością co najwyżej **$\pm 2.5\%$** przy współczynniku ufności **$1 - \alpha = 0.90$**

$$n_0 = 150 \quad p = \frac{75}{150} = \mathbf{0.5} \quad \alpha u = 1.645 \quad d = 0.025$$

$$n = \frac{(1.645)^2 \cdot 0.5 \cdot 0.5}{(0.025)^2} = 1082.4 \approx \mathbf{1083}$$

Należy jeszcze dodatkowo rozmawiać z około $n - n_0 = 1083 - 150 = 933$ studentami.

Szacowanie niezbędnej liczebności próby

Przykład c.d. (jeszcze raz to samo zadanie, ale dla innych danych):

Przeprowadzono wywiad z 150 studentami. Z tego **105** paliło systematycznie tytoń. Z iloma studentami należy dodatkowo przeprowadzić wywiad, aby oszacować procent palących z dokładnością co najwyżej **$\pm 2.5\%$** przy współczynniku ufności **$1 - \alpha = 0.90$**

$$n_0 = 150 \quad p = \frac{105}{150} = \mathbf{0.7} \quad {}_{\alpha}u = 1.645 \quad d = 0.025$$

$$n = \frac{(1.645)^2 \cdot 0.7 \cdot 0.3}{(0.025)^2} = 876.4 \approx \mathbf{877}$$

Należy jeszcze dodatkowo rozmawiać z około $n - n_0 = 877 - 150 = 727$ studentami.